Drehung eines beliebigen Vektors (x,y,z) um eine beliebige Achsrichtung (a,b,c) um den Winkel @

Wir bringen zunächst den Achsrichtungsvektor auf die Länge 1:(1/ Wurzel(a^2+b^2+c^2))* (a,b,c)=(A,B,C).
Das Ergebnis der Richtungsänderung ergibt sich aus:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin@ * \begin{pmatrix} 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \\ -B & A & 0 \end{pmatrix} + (1-\cos@) * \begin{pmatrix} 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \\ -B & A & 0 \end{pmatrix}^2 \right] * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(Beachte, daß die dritte Matrix quadriert wird und danach mit cos@ multipliziert wird).Stelle Dir eine Ebene vor, zu der die Achse normal ist und in der die Spitze des Pfeils(das ist das Bild des Vektors) liegt.. In dieser Ebene addierst Du zur Spitze einen Pfeil in Fahrtrichtung – also so wie die Drehung orientiert ist. Und zu diesem addierst Du einen weiteren Pfeil in dieser Ebene, um 90 Grad nach links gedreht gegenüber dem vorigen Pfeil.
Der Ursprung (x,y,z) und das Ergebnis der obigen Formel haben gleiche Länge.
Der Winkel zwischen diesen beiden ist nicht der Drehwinkel – die Spitze des Vektors wird in der Ebene gedreht, die senkrecht zur Achse ist.

Aus einer Dreh-Matrix Achse und Winkel bestimmen

Für eine Dreh-Matrix gilt: det D = 1 und $D^T * D = E$, wobei D^T die transponierte Matrix ist, d.h. man hat Spalten mit Zeilen vertauscht und E ist die Einheitsmatrix. Jede Matrix läßt sich zerlegen in eine symmetrische ($a_{ik} = a_{ki}$) und eine schiefsymmetrische ($a_{ik} = -a_{ki}$).

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ g & b & f \\ h & i & c \end{pmatrix} = 1/2 * \begin{pmatrix} 2a & d+g & e+h \\ d+g & 2b & f+i \\ e+h & f+i & 2c \end{pmatrix} + 1/2 * \begin{pmatrix} 0 & d-g & e-h \\ g-d & 0 & f-i \\ h-e & i-f & 0 \end{pmatrix}$$

Der antisymmetrische Teil gibt uns bereits die Achsrichtung:: (i-f, e-h, g-d)*1/2.
Seine Länge ist sin @.
Die Hauptdiagonale der Matrix liefert uns die Spur: a+b+c und dies ist gleich 1 + 2*cos @.
Daraus berechnet man @.

Ein Bonus: Die affinen Abbildungen, das sind hier die 3x3-Matrizen, lassen sich in die Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen zerlegen.Die ersten werden mittels Hauptachsen-Transformation untersucht und die schiefsymmetrischen – auf einen Vektor angewandt – entsprechen dem Vektor-Produkt:

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (a, b, c) \times (x, y, z)$$

Hero van Jindelt