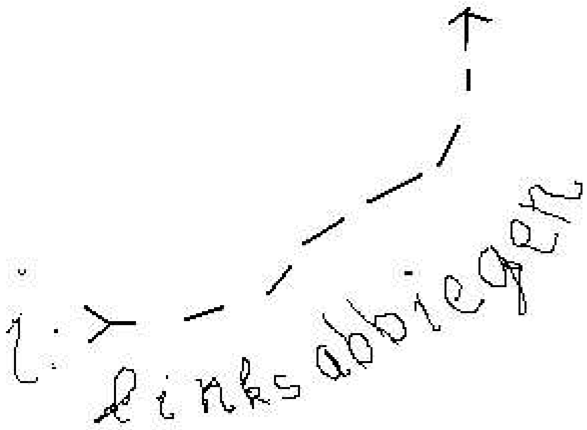
i

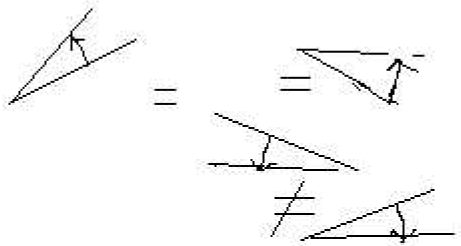
"i i i i i !" ruft Jin, der Schiffsjunge und reibt sich die Backe.
"8 Strich backbord!", schreit der Kapitän. "8 Strich - das ist ein rechter Winkel, also ein Viertel Kreis - und nach backbord heißt nach links wenden, so wie die Sterne um den Himmels-Nordpol kreisen, und so wie die Große Bärin dabei immer nach links abbiegen muß. Damit Du das nie vergißt: wo Deine Backe jetzt rot ist, ist das rote Backbord; und die andere Seite ist grün, ist Steuerbord.



1/4 Kreis = 90 Grad = 8 Strich (wobei man den Kreis in 32 Strich geteilt hat) bezeichnet einen Richtungsunterschied = Winkel .
Drehen nach backbord = linksrum ist ein Drehsinn, eine Drehrichtung.
Mathematisch- analytisch ist ein Winkel eine Zahl; die Drehrichtung fügt ein Vorzeichen: + hinzu; rechtsrum ein minus-Zeichen. So bekommen wir einen

orientierten Winkel, orientierten Richtungsunterschied.

Geometrisch-grafisch müssen wir jetzt den Anfangsschenkel eine Winkels von seinem Endschenkel unterscheiden



.

Der Käptn übergibt dem Matrosen das Steuer und nimmt Jin mit zur Karte, in die er die gefahrene Strecke einträgt.
Jin sieht eine Bleistiftlinie eingezeichnet, die vom Hafen ausgeht. "Was kannst Du darüber sagen?", fragt der Käptn und deutet auf das andere Ende der Linie. "Hier sind wir vor der Wendung Richtung OstNordOst gefahren," sagt Jin und der Käptn ergänzt: "und bei der Wendung war die Achse der Schiffsmast, der Drehsinn backbords und der Winkel 8 Strich."-"ONO vorher, jetzt ist die Richtung NordNordWest, der Unterschied zwischen den Richtungen ist ein rechter Winkel, also

ONO + 8' = NNW ." setzt Jin fort.

"Und wofür ist das gut?" fragt der Käptn und gibt selbst die Antwort. "Hier liegt das Lineal im Wendepunkt und längs unserer neuen Fahrtrichtung."-"Wir werden auf die Sandbank auffahren", unterbricht ihn Jin. "Genau, wir können in die Zukunft blicken, oder simpel gesagt, wir planen. Nach 3 Seemeilen müssen wir den Kurs ändern."

Den Kurs, den man einschlägt, die Fahrtrichtung, ist eine Raumrichtung und die bezieht sich auf eine Grundrichtung (bei Karten auf Nord = oben, in der Mathematik auf die Richtung nach rechts = Ost).
Richtungen kann man mit Namen, wie Südost benennen, oder ihr eine feste Zahl, wie 30 Grad zuordnen (genau wie bei Hausnummern, also eine Ordnungszahl).

Den Kompass können wir auf der Karte beliebig anlegen, dabei verschieben sich alle Richtungen parallel und bleiben somit zur Grundrichtung gleich.

Einen orientierten Winkel können wir auch auf eine andere als die Grundrichtung beziehen.Bei einer Wendung (also einer Drehung, bei der die Achse mobil und nicht ortsgebunden ist) nehmen wir die Fahrtrichtung als Bezugsrichtung, als Anfangsschenkel und erhalten die neue Fahrtrichtung als Endschenkel.

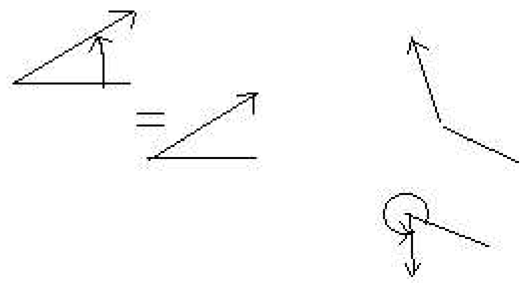
"Wir tragen doch jede Fahrtstrecke mit Länge und Richtung ein?" fragte Jin."Ja", war die Antwort."im Hafen haben die mir ihr Radar gezeigt und auf dem Schirm war der Ort eines jeden Schiffes auch durch Länge, also Abstand vom Hafen und durch Richtung auf dem Schirm festzustellen."
"Das könnten wir hier auch so machen - sieh mal, hier im Atlas ist eine Karte vom Nordpolgebiet. Dies ist die Grundrichtung nach Greenwich und wenn man um den Pol herumfährt, dann ändert sich die Blickrichtung vom Pol aus. Die zweite Art der Bewegung - auf den Pol zu oder davon weg - ändert dagegen den Abstand."

"Komisch", sagte Jin, "was für uns eine gerade Fahrtstrecke ist- sieht vom Hafen aus wie eine Drehung und gleichzeitige Vergrößerung der Entfernung!"

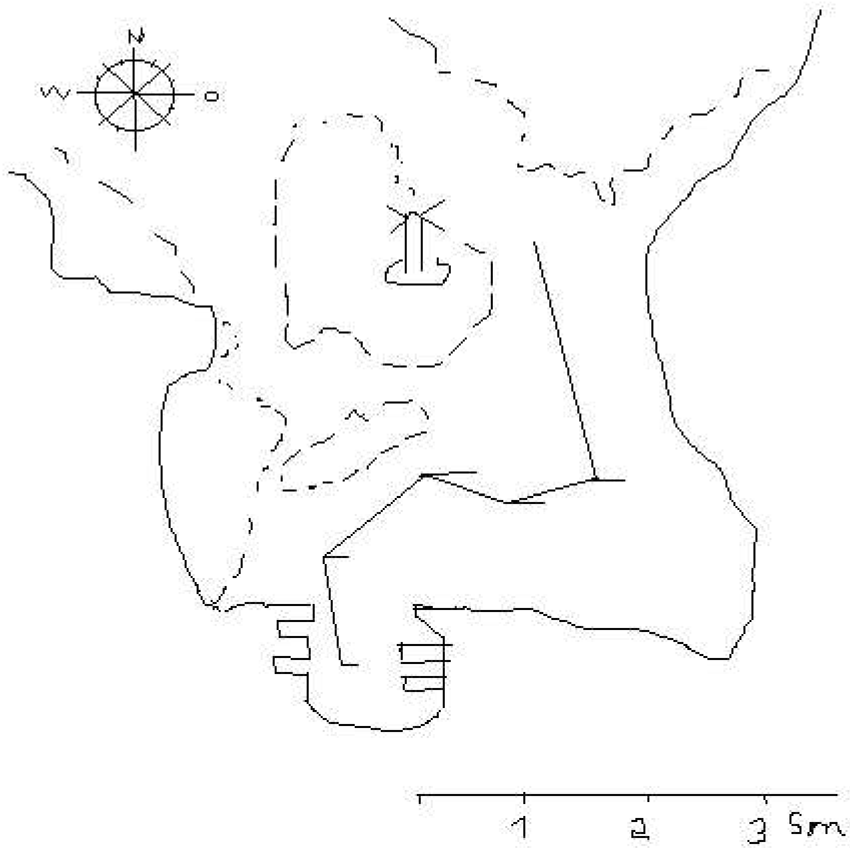
Mathematisch-analytisch sind

Vektoren

der Ebene geordnete Zahlenpaare mit bestimmten Verknüpfungsregeln.
Man kann vielerlei damit darstellen:Geschwindigkeit, Temperatur-Unterschied, Kräfte,...
Grafisch-Geometrisch ist eine Fahrtstrecke mit Länge und Richtung ein Beispiel eines Vektors - allgemein hat er eine gerichtete Länge (eine Länge mit Vorzeichen) und einen orientierten Richtungsunterschied.
Er ist unabhängig von Grundrichtung, Ort, Maßeinheit und Koordinatensystem.



Wir zeichnen einen Vektor durch Anfangsrichtung und im Winkel dazu die Endrichtung von bestimmter Länge und mit einer Pfeilspitze versehen.
Wählen wir einen Ort,etwa den Hafen, als Ausgangsort oder Bezugspunkt, dann ist jede Verbindung von ihm zu einem Schiffsort ein Ortsvektor, er hat Länge und einen Winkel zur Grundrichtung.
Binden wir einen Vektor (z.B. 3 sm in Richtung NNW) an einen Ort, z.B. die Wendestelle, erhalten wir hier einen Feldvektor, bezogen auf dieGrundrichtung.



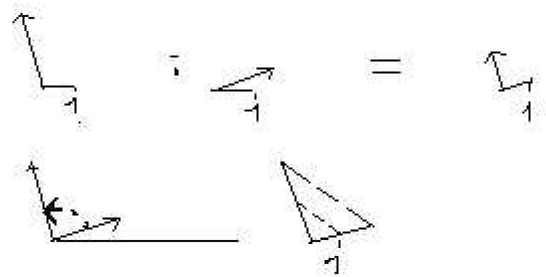
"Soetwas können wir jetzt gebrauchen: wir müssen gleich den Leuchtturm umrunden und dabei den Abstand von ihm vergrößern.Zeichne eine Linie vom Leuchtturm zum Schiff, eine zweite vom Leuchtturm zum Ort, wo wir hinwollen - beide haben eine Winkelunterschied und die zweite ist länger wie die erste."

Das Aneinanderfügen von Vektoren, die Nut des zweiten an die Spitze des ersten, wobei die Anfangsrichtungen parallel liegen, nennen wir Addition
So erhalten wir z.B. die Fahrtstrecke, die Bewegung von Nut zur Spitze und weiter zur nächsten Spitze.Fügen wir einen Ortsvektor vom Anfangspunkt hinzu oder starten wir dort, erhalten wir die Orte, bzw. die Bewegung des Ortsvektors entlang der Route.

Die Differenz zwischen zwei Ortsvektoren ist die Bewegung von der Spitze des einen zum anderen, ist die Fahrtstrecke als Vektor Rechnerisch: später minus früher.

Zeichnerisch können wir dies einfach durchführen, rechnerisch ist dies viel schwieriger - man sehe sich nur die beteiligten Winkel und Längen an.

Rechnerisch einfacher sind Division und Multiplikation von Vektoren: Die Feldvektoren vom Leuchtturm zum Schiff vor und nach der Umrundung gehen beide vom selben Punkt aus und beide haben dieselbe Anfangsrichtung, das Verhältnis der beiden Längen, zusammen mit dem Winkelunterschied ist selbst ein Vektor, das Ergebnis der Division.



(s , ß) : (r , @) := (s / r , ß - @)

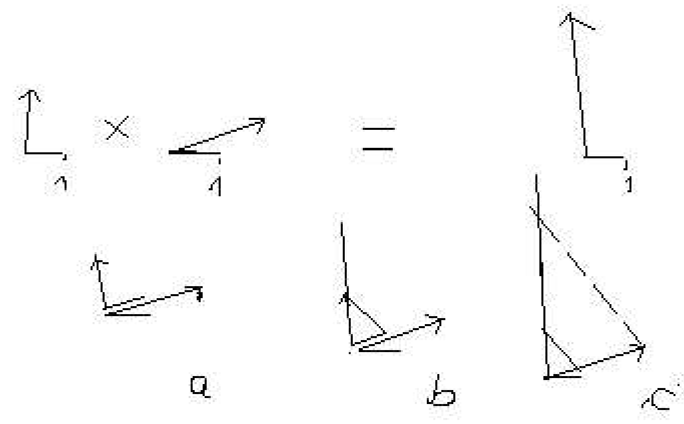
Jin antwortet: "Das ist umgekehrt, wie bei der Wendung. Da haben wir einer Richtung einen Winkel hinzugefügt, um die neue Richtung zu erhalten. Und hier haben wir den Unterschied von zwei Richtungen als Winkel."
"Stimmt" , sagt der Käptn, "aber jetzt müssen wir erstmal sicher um den Leuchtturm rum!"

Bei der Wendung haben wir einen Fahrtrichtungsvektor unbestimmter Länge r der Richtung NNO oder 22,5 Grad von Osten aus rechtwinklig nach links gedreht, ohne die Länge zu verändern, also mit (1 , 90°) multipliziert.

(1 , 90°) mal (r , 22,5°) = (r , 22,5°+90°)

und dazu mußte der Anfangsschenkel des zweiten Winkels auf dem Endschenkel des ersten landen und beide die Achse gemeinsam haben.
Bei der Umrundung des Leuchtturms können wir den Feldvektor Leuchtturm-Schiff mit einem Vektor (1,5 , 88°) malnehmen, der ihn verlängert und dreht in den neuen Feldvektor Leuchtturm-Zielort:

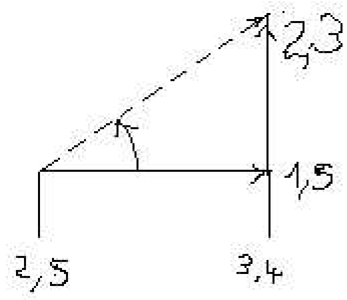
(1,5 , 88°) mal (2 , 25°) = (3 , 113°)



(r , @) mal (s , ß) = (r mal s , @+ß)

Wenn wir eine Grundrichtung vorgeben, dürfen wir bei allen Vektoren, deren Anfangsschenkel in diese Grundrichtung zeigt, diesen weglassen, also den Vektor nur als (einbeinigen) Pfeil zeichnen.

Nachdem sie den Leuchtturm passiert hatten, fragte Jin: "Auf der Karte vom Nordpol waren alle Orte durch ihren Abstand vom Pol und dem Winkel zur 0°-Linie festgelegt. Auf unserer Karte ist aber kein Pol für die Orte." - "Gut beobachtet", meinte der Käptn, " auf dieser Karte siehst Du ein rechtwinkliges Gitternetz, das denselben Zweck erfüllt. Nehmen wir mal diesen Punkt als Ausgangspunkt für alles auf der Karte. Zum nächsten Gitterpunkt ist es immer eine Seemeile. Um zu diesem Ort unserer Route , hier beim Hafen, zu kommen, gehen wir 2,5 sm nach rechts und 1,5 sm nach oben.Diese Zahlen nennt man auch die Koordinaten des Orts.Lies mal hier den nächsten Punkt ab."
"3,4 sm nach rechts und 2,3 sm nach oben."
Der Käptn zeichnet auf einem Blatt folgendes Dreieck:

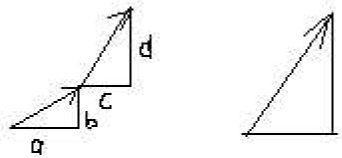


"Jetzt kannst Du die Fahrtstrecke messen und auch den Winkel."
Jin meinte:"Jetzt könnte ich sie genausogut auch durch zwei rechtwinklige Zahlen beschreiben, wie die Koordinaten der Orte."
"Aber wehe, wenn Du so einen rechtwinkligen Kurs fährst!" scherzte der Käptn. "Naja, manchmal..., wenn man eine Backpfeife bekommmt..."
Der Käptn wollt natürlich das letzte Wort:"Hätten wir aber einen anderen Gitterpunkt als Ausgangpunkt gewählt, ja selbst einen, der gar nicht auf dieser Karte liegt, brauchte man nur seine zwei Koordinaten von allen Orten abziehen."

Grafisch-geometrisch ist jeder Vektor durch eine gerichtete Länge und einen orientierten Richtungsunterschied darstellbar. Dies nennen wir die polare Form - derselbe Vektor hat auch eine rechtwinklige oder cartesische Form:
zwei gerichtete Längen, wobei die zweite rechtwinklig links-drehend zur ersten steht.

$$(r, \alpha) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

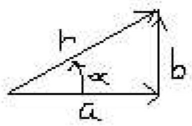
War bisher die Addition und Subtraktion mehr als schwierig zu rechnen, ist es jetzt simpel:



$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

(die Anfangsschenkel müssen dabei parallel liegen)

Die <u>Umwandlung</u> <u>cartesich-polar</u> ist zeichnerisch für den nicht schwer, der rechtwinklige Dreiecke zeichnen kann.
Rechnerisch ist es etwas mehr, dafür aber beliebig genau:

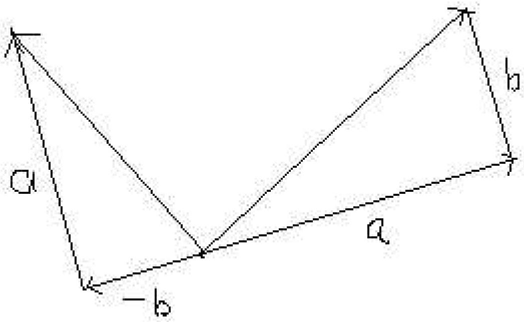


$$(r, \alpha) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \alpha \\ r \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

und umgekehrt berechnen wir aus a und b:

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und
@ = arc cos (a / r) , wenn b >0 und b = 0
@ = 360° - arc cos (a / r) , wenn b < 0.
und somit können wir jetzt auch zwei Vektoren in polarer Form addieren: umwandeln in cartesische Form , addieren und wieder zurückverwandeln.

Aber Jin ließ nicht locker: "Und wenn man eine Fahrtstrecke verlängert, sagen wir mal verdreifacht, dann verdreifachen sich auch seine beiden Komponenten."
"Gut.", sagte der Käptn, "und wenn, und wenn - na ja,drehe mal um 8 Strich, also einen rechten Winkel nach links."
"Die erste Komponente zeigt jetzt nach oben und die zweite liegt auf der Geraden der ersten, aber in Gegenrichtung.



Ich nenne das Kommando. drehe backbords um 8 Strich einfach i .

$$\boxed{i \text{ mal} \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}}$$

".
"Wunderbar," sagte der Käptn," jetzt weißt Du alles über Ebenen.
Aber, aber unsere Erde ist eine Kugel. Wir haben vereinfacht.
Das Koordinatensystem der Nordpolkarte und dieses hier auf unserer ist ein und dasselbe - da kannst Du jetzt mal über nachdenken."

Für die <u>Multiplikation von Vektoren in cartesischer Form</u> brauchen wir nicht den Umweg über die polare Form wählen, obwohl dort ja die Multiplikation ganz einfach war. Dank Jin's Operation

i = drehe um 90°

$$i\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$$

ergibt sich: $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ac-bd\\ad+bc\end{pmatrix}$

Ableitung:
Die Zahl 1 ist ein Faktor, der alles gleich läßt, in polarer Form also (1 , 0°), und in cartesisicher Form

$$1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Die Zahl c formt, streckt also oder staucht:

$$c\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ca\\cb\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}$$

$$i\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ und } i\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = i\cdot i = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -1 \quad \text{und } d\cdot i = \begin{pmatrix}0\\d\end{pmatrix}$$

Und schließlich $\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$.

Alle gewohnten Rechenregeln bleibenund wir können alles miteinander verwenden:

$$(3+4i)(-1+i)+3i\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+6 \quad +\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \quad = 0$$

Für den, der schon ein wenig mit Vektoren rechnen kann:

Du weißt, was Vektoren der Ebene sind, wie man sie addiert und sie streckt und verkürzt. Auf dieser stinknormalen Ebene kann man Vektoren auch drehen. Dafür brauchen wir einzig und allein eine neue Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ mal } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}$$

(Dies ist weder die Skalarmultiplikation, noch die Vektormultiplikation - diese brauchen wir hier nicht).

Man kann einen Vektor auch durch seine Länge r und einen Winkel @ darstellen, a = r cos @ und b = r sin @ . Damit dreht man also den zweiten Vektor um @ und formt (streckt/staucht) ihn um den Faktor r.

Einige wissen, daß man auch mit Hilfe von Matrizen drehen kann:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ oder } r \begin{pmatrix} \cos @ & -\sin @ \\ \sin @ & \cos @ \end{pmatrix}$$

dreht ebenso um @ und formt mit Faktor r.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Und das war schon alles !

Nach diesem Weg können wir als Lohn noch eine andere Schreibweise für Vektoren hinzufügen. Jeder Vektor kann als Summe zweier Grund-Vektoren geschrieben werden, beide jeweils geformt (gestreckt oder gestaucht):

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

. Wir nennen jetzt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} := i$

Dann ist $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + i\,b$. Und $i \text{ mal } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$.

Es gibt nur noch eine einzige Drehung , genannt i. Es ist eine Operation - drehe linksrum um einen rechten Winkel = vertausche die Plätze von c und d und multipliziere die neue erste Zahl mit -1.Zweimal nacheinander gedreht gibt i mal i = -1 .

Alles andere ist Streckung, Addition usw.

Diese einfache Schreibweise (in etwas anderer Form) und auch die Rechenregeln wurden1572 von Bombelli gefunden und wir sollten Sie nach ihm benennen. Es war die erste Vektorrechnung!
Bombelli war Wasserbauingenieur in Norditalien, eine Handels-Welt, die die doppelte Buchführung erfand, und dies zu einer Zeit, als Mercator die Landkarten-Koordinaten einführte.

26.10.2003 zu Seite 5 hinzugefügt:“Rechnerisch:später minus früher“