Keine imaginäre Achse :

Caspar Wessel

"Über die analytische Repräsentation der Richtung"

1797

Über die analytische Bezeichnung der Richtung,

ein Versuch, angewandt vornehmlich zur Auflösung ebener und sphärischer Polygone.

Von

Caspar Wessel, Landmaaler

Vorwort:
Caspar Wessel kann seinen Beitrag zu sci.mathematik nicht mehr selbst bekannt machen, seit seiner Veröffentlichung 1799 wurde der verschwiegen und versteckt. Wenn Du schon mal für eine Gruppe geschrieben hast und es bleibt dann in der Übersicht heißen : (1 Beitrag), wirst Du sein emotionales Erleben nachempfinden können.
Um ihn zu ehren, kann ich mir keinen besseren Rahmen als Google-groups denken, deshalb wird er dort veröffentlicht.

Und es steckt noch mehr drin, als viele meinen, so etwa behandelt Wessel die komplexen Zahlen oder R2-Vektoren ganz un-imaginär, selbst das i hat er durch ein epsilon (€) ersetzt.
Wessel's Arbeit beruht natürlich auch auf der Bombelli's, der ja die Quadratwurzel -1 in die Realität holte. Dazu habe ich noch nicht allzuviel herausgegoogelt.

Nicht allzulang nach Wessel hat Hamilton mit dem Text über algebraic couples realen Grund beackert. Sie werden manchmal als "formale Definition" abgetan. David R. Wilkins gibt uns seinen Text "PureTime.pdf"(und eine Rezension, die so ähnlich heißt:"BARep348.pdf")
http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton
Der aktuelle Anlaß wird in der Vorschrift zur Überschrift angedeutet. Denn für später eingeführte Begriffe, wie "komplexe Ebene, Gauss-Ebene, imaginäre Achse, imaginärer Teil" sind überhaupt keine Definitionen zu finden, die einen mathematischen Unterschied zu einer Ebene, einer y-Achse und der zweiten Komponente eines geordneten Paares reeller Zahlen beschreiben, oder ?
Meine Bemühungen hier unter
http://i-ist-nicht-mehr-imaginair.de.vu

Die französische Übersetzung von Wessel's Text (komplett!!) bei
<http://gallica.bnf.fr/scripts/ConsultationTout.exe?O=N099681>
Mein dänischer Text ist fast unleserlich geworden und meine dänisch-Kenntnisse ähneln einem dk. Deshalb möchte ich Euch bitten, diesen rohen Übersetzungsversuch eifrig zu verbessern, möglichst auch hier unter google: de.sci.mathematik - und vor allem dann auch zu propagieren.
Ihr findet diesen ersten Teil komplett als pdf unter
http://www.i-z.eu.tt

Roh-Übersetzung 1.Teil von:
(1797):

Über die analytische Bezeichnung der Richtung,
ein Versuch, angewandt vornehmlich zur Auflösung ebener und sphärischer Polygone.
von
Caspar Wessel, Landmaaler

Dieser nachfolgende Versuch geht um die Frage, wie können wir Richtung analytisch bezeichnen; das heißt, wie sollen wir gerade Linien so ausdrücken, daß in einer einzigen Gleichung, die eine unbekannte und andere bekannte verknüpft, beides: die Länge und die Richtung der unbekannten Linie ausgedrückt werden können.

Um diese Frage zu beantworten, basiere ich meine Arbeit auf zwei Annahmen, die mir unbestreitbar erscheinen. Die erste ist: Richtungsänderungen, die durch algebraische Operationen hervorgerufen werden können, sollen durch ihre Zeichen angezeigt werden. Und die zweite: Richtung ist nicht ein Subjekt der Algebra außer in soweit, als sie durch algebraische Operationen verändert werden kann. Aber da diese Richtung nicht ändern können (zumindest, wie gewöhnlich erklärt), außer in ihr Gegenteil, das ist, vom positiven zum negativen, und umgekehrt, sind diese beiden die einzigen Richtungen, die man mit gegenwärtigen Methoden bezeichnen kann; und für die anderen Richtungen müsste das Problem unlösbar sein. Und ich nehme an, daß dies der Grund ist, daß niemand diese Sache angepackt hat. (Ausser Magister Gilbert in Halle, dessen Preis-Schrift *Calculus situs* eine Erklärung dieses Themas enthalten könnte). Es wurde unzweifelhaft als unzulässig betrachtet, irgendetwas in der akzeptierten Erklärung dieser Operationen zu verändern. Und diesem widersetzen wir uns nicht, solange die Erklärung nur von Quantitäten im allgemeinen handelt.Aber wenn in bestimmten Fällen die Natur der behandelten Quantitäten nach präziseren Definitionen dieser Operationen zu rufen scheint und diese zum Vorteil benutzt werden können, sollte es nicht als unerlaubt betrachtet werden, Modifikationen anzubieten. Denn, wenn wir von arithmetischer zu geometrischer Analysis fortschreiten, oder von Operationen mit abstrakten Zahlen zu geraden Linien, treffen wir auf Quantitäten, die dieselben Beziehungen zueinander haben wie Zahlen, sicherlich; aber sie haben auch noch viele mehr. Geben wir diesen Operationen nun eine breitere Bedeutung und beschränken ihren Gebrauch nicht wie bisher auf gerade Linien derselben oder entgegengesetzten Richtung; aber wenn wir unser bisheriges etwas enges Konzept von ihnen ausstrecken, so, daß es anwendbar wird auf dieselben Fälle wie bisher, sondern auch zu unendlich vielen mehr ; sage ich, wenn wir uns diese

Freiheit nehmen, aber nicht die akzeptierten Regeln der Operationen übertreten, werden wir nicht die erste Lehre der Zahlen verletzen. Wir dehnen sie nur aus, passen sie der Natur der betrachteten Quantitäten an und halten uns an die Regel einer Methode, die fordert, daß wir stückweise eine schwierige Theorie verständlich machen. Es ist keine unvernünftige Forderung, daß Operationen, die in der Geometrie gebraucht werden, in einer weiteren Bedeutung genommen werden, als die, die ihnen in der Arithmetik gegeben ist. Und man wird bereitwillig zugeben, daß es auf diese Weise möglich sein sollte, eine unendliche Anzahl von Veränderungen der Richtung der Linien herzustellen. Indem wir dies tun, werden wir volbringen, (wie später bewiesen wird) nicht nur, daß alle unmöglichen Operationen vermieden werden können – und wir haben den paradoxen Satz, daß man das Mögliche zu manchen Zeiten mit unmöglichen Mitteln auflösen kann, sondern auch, daß die Richtung aller Linien in derselben Ebene analytisch ausgedrückt werden kann wie ihre Länge, ohne den Geist mit neuen Zeichen oder neuen Regeln zu belasten. Auch ist es keine Frage, daß die allgemeine Richtigkeit von geometrischen Sätzen häufig leichter gesehen wird, wenn die Richtung analytisch ausgedrückt werden kann und durch analytische Regeln bestimmt, als durch eine Figur und diese auch nur in bestimmten Fällen.Daher scheint es nicht nur erlaubt, sondern tatsächlich vorteilhaft, Gebrauch von Operationen zu machen, die auf andere Linien zutreffen, als die gleichen (solche derselben Richtung) und der entgegengesetzten. Auf Grund hiervon versuche ich:

1. Erstens, die Regeln für solche Operationen zu definieren;
2. Als Nächstes, deren Anwendung zu zeigen, wenn die Linien in derselben Ebene sind, mit zwei Beispielen;
3. Die Richtung von Linien zu definieren, die in verschiedenen Ebenen liegen, durch eine neue Operationsmethode, welche nicht algebraisch ist;
4. Durch diese Methode ebene und sphärische Polygone zu lösen;
5. Schließlich auf dieselbe Art die gewöhnlichen Formeln der sphärischen Geometrie abzuleiten.

Dies werden die Hauptpunkte dieser Abhandlung sein. Der Anlaß für ihr Entstehen war mein Suchen nach einer Methode, wobei ich die unmöglichen Operationen vermeiden konnte; und als ich diese gefunden hatte, wandte ich sie an, um mich von der Allgemeingültigkeit gewissser allgemein bekannter Formeln zu überzeugen. Der teuerste Unterzeichnende Herr Etatsraad Tetens hat die Mühen auf sich genommen, diese unzulänglichen Untersuchungen durchzulesen. Es ist seiner Ermutigung, dem Rat und der Leitung zu schulden, daß diese Schrift minus einiger ihrer ersten Unvollkommenheiten fortkommt und daß sie für wert gefunden wurde, um aufzutauchen in den Veröffentlichungen der Kongelinge Videnskabers Selskabs Scrivter.

EINE METHODE, UM GEGEBENE GERADE LINIEN DURCH ALGEBRAISCHE OPERATIONEN IN ANDERE UMZUFORMEN;
UND VORNEHMLICH, WELCHE RICHTUNG UND ZEICHEN DIESE HABEN SOLLEN

Gewisse homogene Quantitäten haben die Eigenschaft, daß, wenn sie zusammen gefügt werden, sie eine andere nur als Zuwachs oder Minderung vergrößern oder verkleinern.

Es gibt andere, welche in derselben Situation Veränderungen in der anderen in unzählbaren anderen Arten bewirken. Dazu gehören die geraden Linien.

Somit kann die Entfernung eines Punkts von einer Ebene in unzählberen Arten verändert werden, wenn der Punkt eine mehr oder weniger geneigte gerade Linie ausserhalb der Ebene beschreibt.

Denn, wenn diese Linie perpendikular zur Achse der Ebene ist, das heißt, wenn der Weg des Punktes einen rechten Winkel mit der Achse bildet, bleibt der Punkt in einer Ebene parallel zur gegebenen Ebene, und sein Weg hat keine Wirkung auf seinen Abstand von der Ebene.

Wenn die beschriebene Linie indirekt ist, das heißt, wen sie einen schiefen Winkel mit der Achse der Ebene bildet, wird sie der Entfernung mit einer Länge, die kleiner ist wie ihre eigene, hinzufügen oder abziehen, sie kann die Entfernung in unzählbaren Arten vergrößern oder verkleinern.

Wenn sie direkt, das heißt, in einer Linie mit der Entfernung ist, wird sie diese mit ihrer ganzen Länge vergrößern oder verkleinern; im ersten Fall ist dies positiv, im zweiten negativ.

Daher, alle geraden Linien, die durch einen Punkt beschrieben werden können, sind, in Bezug auf ihren Effekt auf die Entfernung eines gegebenen Punkts von einer Ebene außerhalb des Punkts, entweder direkt oder indirekt oder rechtwinklig (Indifferent wäre ein passenderer Name, klänge er nicht so ungewöhnlich für unsere Ohren.) entsprechend wie sie zu der Distanz addieren oder subtrahieren , das Ganze, einen Teil oder Nichts von ihrer eigenen Länge.

Da eine Quantität absolut genannt wird, wenn ihr Wert durch sie selbst gegeben wird und nicht durch den Bezug zu einer anderen Quantität, können wir in den weiteren Definitionen die Entfernung die absolute Linie nennen; und der Teil der relativen Linie der die absolute Linie verlängert oder verkürzt kann der Effekt der relativen Linie genannt werden.

Es gibt andere Quantitäten neben geraden Linien unter denen solche Beziehungen exitieren. Es wäre deshalb keine nutzlose Aufgabe diese Beziehungen im Allgemeinen zu erklären und ihr allgemeines Konzept in einer Erklärung von Operationen einzuschließen. Aber ich habe den Rat von Weiseren akzeptiert, daß in dieser Schhrift sowohl die Natur des Inhalts wie die Einfachheit der Ausführung verlangen, daß der Leser hier nicht mit solch abstarkten Konzepten belastet wird. Ich werde konsequent folgend nur von geometrischen Erklärungen Gebrauch machen bei

§1

Zwei gerade Linien werden addiert, wenn wir sie auf solche Weise vereinigen, daß die zweite Linie beginnt, wo die erste endet, und dann eine gerade Linie von dem ersten zu dem letzten Punkt der vereinigten Linien ziehen. Diese Linie ist die Sume der vereinigten Linien.

Zum Beispiel, wenn ein Punkt sich drei Fuss vorwärts bewegt und rückwärts zwei Fuss, ist die Summe dieser zwei Wege nicht die ersten drei und die letzten zwei Fuss kombiniert; die Summe ist ein Fuss vorwärts. Denn dieser Weg, beschrieben durch denselben Punkt, gibt denselben Effekt wie die beiden anderen Wege.

Gleicherweise, wenn eine Seite eines Dreiecks sich von a nach b erstreckt und die andere von b nach c, soll die dritte von a nach c die Summe genannt werden.Wir werden sie durch ab+bc bezeichnen, so daß ac und ab+bc dieselbe Bedeutung haben; oder ac=ab+bc= - ba+bc, wenn ba das Entgegengesetzte von ab ist. Wenn die addierten Linien direkt sind, ist diese Erklärung in völliger Übereinstimmung mit der gewöhnlich gegebenen. Wen sie indirekt sind, widersprechen wir nicht der Analogie, indem wir eine gerade Linie die Summe von zwei anderen geraden Linien vereinigt nennen, weil sie denselben Effekt gibt wie diese. Noch ist die Bedeutung, die ich dem Symbol + hinzugefügt habe, so sehr ungewöhnlich; weil man in dem Ausdruck

$$ab + ba/2 = 1/2 \quad ab$$

sehen kann, daß ba/2 nicht Teil der Summe ist. Wir können somit ab+bc=ac setzen ohne deswegen bc als Teil von ac zu sehen; ab+bc ist nur das Symbol, das ac bezeichnet.

§2

Wenn wir mehr als zwei gerade Linien addieren wollen, folgen wir demselben Vorgang. Sie werden vereinigt durch die Anhängung des Endpunkts der ersten zu dem Anfangspunkt der zweiten und der Endpunkt dieser zu dem Anfangspunkt der dritten usw.. Dann zeichnen wir eine gerade Linie von dem Punkt, wo die erste beginnt zu dem Punkt, wo die letzte endet; und dieses nennen wir ihre Summe.

Die Reihenfolge, in der diese Linien genommen werden, ist unbedeutend; da egal wo ein Punkt eine gerdae Linie in drei Ebenen mit rechtem Winkel zueinander beschreibt, hat diese Linie den gleichen Effekt auf die Abstände des Punkts von jeder dieser Ebenen. Folgerichtig trägt jede dieser addierten Linien gleichviel zu der Bestimmung der Position des letzten Punkts der Summe bei, ob sie den ersten, den letzten oder irgendeinen Platz in der Abfolge einnimmt. Folgerichtig ist die Reihe in der Addition von geraden Linien unbedeutend. Die Summe wird immer dieselbe sein; weil der erste Punkt als gegeben vorgeschlagen war und der letzte immer dieselbe Position einnimmt.

So, daß in diesem Fall ebenfalls die Summe durch die addierten Linien, verbunden miteinander durch das Symbol + , bezeichnet wird. In einem Vierkant zum Beispiel, wenn die erste Seite von a nach b gezeichnet ist, die zweite von b nach c, die dritte von c nach d, aber die vierte von a nach d, können wir dann schreiben: ad=ab+bc+cd.

§3

Wenn die Summe verschiedener Längen, Breiten und Höhen =0,
dann ist die Summe der Längen, die Summe der Breiten, und die Summe der Höhen, jede für sich =0.

§4

Ein Produkt von zwei geraden Linien soll unter allen Umständen möglich sein von einem ihrer Faktoren zu formieren in derselben Weise wie der andere Faktor von der positiven, dieser absoluten Linie, die wir =1 setzen; das ist:

Erstens, die Faktoren sollen eine solche Richtung haben, daß sie beide in derselben Ebene wie die positive Einheit auftauchen.

Zweitens, bezüglich der Länge soll sich das Produkt zu einem Faktor verhalten, wie der andere Faktor zur Einheit. Und

Schließlich, wenn wir der positiven Einheit, den Faktoren, und dem Produkt einen gemeinsamen Ursprung geben, soll das Produkt, bezüglich seiner Richtung in der Ebene der Einheit und der Faktoren liegend und von dem einen Faktor um so viele Grad abweichend, und auf derselben Seite, wie der andere Faktor von der Einheit abweicht, der Summe der Richtungswinkel der Faktoren gleich werden.

§5

Lass +1 die positive, geradlinige Einheit bezeichnen und +€ eine gewisse andere Einheit rechtwinklig zu der positiven Einheit und denselben Ursprung haben; dann wird der Richtungswinkel von +1 gleich sein zu 0° , der von -1 zu 180°, der von +€ zu 90° und der von - € zu -90° oder 270°. Durch die Regel, daß die Richtungswinkel des Produkts der Summe der Winkel der

Faktoren gleich sein sollen, haben wir: (+1)*(+1)=+1; (+1)*(-1)= -1; (-1)*(-1)=+1; (+1)*(+€)=+€; (+1)*(-€)= -€; (-1)*(+€)= - €; (-1)*(-€)=+€; (+€)*(+€)= - 1; (+€)*((-€)=+1; (-€)*(-€)= - 1.

Von diesem ist zu sehen, daß € gleich ist zu $\sqrt{-1}$; und die Divergenz des Produkts so bestimmt ist, daß nicht eine der gewöhnlichen Regeln der Operation verletzt wird.

$6

Der Cosinus zu einem Kreisbogen, der begint mit dem seitlichsten Punkt des Radius +1, ist der Teil des Radius , oder seines entgegengesetzten, der im Ursprung begint und in der Senkrechten unter dem Endpunkt des Bogens endet. Der Sinus des Bogens wird senkrecht zum Cosinus gezeichnet, von seinem seitlichsten Punkt zum Endpunkt des Bogens.

Deshalb ist nach §5 der sinus eines rechten Winkels gleich zu $\sqrt{-1}$. Setze $\sqrt{-1}$ = €. Sei v irgendein Winkel, und lass sinus v eine gerade Linie derselben Länge wie des sinus des Winkels v bezeichnen; positiv, wenn das Mass des Winkels endet in der ersten Hälfte des Umkreises, aber negativ, wenn in der zweiten. Dann folgt von §§4 und 5 daß € sin v den sinus des Winkels v ausdrückt bezüglich beidem: Richtung und Länge.

$7

In Übereinstimmung mit §§1 und 6 ist der Radius, der im Ursprung beginnt und von der absoluten oder positiven Einheit mit einem Winkel v abweicht, gleich zu cos v +€ sin v. Men nach $4 soll das Produkt der zwei Faktoren, von denen einer von der Einheit mit einem Winkel v abweicht, und der andere mit einem Winkel u, von der Einheit mit einem Winkel v+u abweichen. Alsdann, wenn die gerade Linie cos v + € sin v multipliziert wird mit der geraden Linie cos u + € sin u, ist das Produkt eine gerade Linie, dessen Richtungswinkel v+u ist. Deshalb können wir das Produkt nach §§1 und 6 bezeichnen durch
cos(v+u) + € sin (v+u).

$8

Das Produkt (cos v + € sin v)*(cos u + € sin u) oder cos (v+u) + € sin (v+u) kann noch auf andere Weise ausgedrückt werden, nämlich dadurch, in eine Summe die Teilprodukte zu addieren, die sich ergeben, wenn jede der addierten Linien, deren Summe einen Faktor bildet, multipliziert wird mit jeder von diesen, deren Summe den anderen Faktor ausmacht. Deshalb werden wir, wenn wir die bekannten trigonometrischen Formeln benutzen

$\cos(v+u) = \cos v \cos u - \sin v \sin u$,
$\sin(v+u) = \cos v \sin u + \cos u \sin v$,
diese Form bekommen:
(cos v +€ sin v)*(cos u + € sin u) =
cos v cos u - sin v sin u + € (cos v sin u + cos u sin v).
Diese zwei Formeln kann man ohne Nachlässigkeit und ohne Weitschweifigkeit für alle Winkel v und u beweisen, sei einer oder beide positiv oder negativ, groß oder klein oder recht. Die Sätze, von denen diese Formeln ausgehen, gewähren folgerichtig auch deren Allgemeingültigkeit.

$9

Nach §7 ist cos v +€ sin v der Radius eines Kreises, dessen Länge gleich der Einheit ist und dessen Abweichung vom cos 0° Grad der Winkel v ist. Es folgt, daß r cos v + r€ sin v eine gerade Linie bezeichnet, deren Länge r ist und deren Richtungswinkel v ist. Denn, wenn die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks in ihrer Länge r mal wachsen, vergrößert sich die Hypotenuse r -fach; aber der Winkel bleibt gleich. Jedoch, nach §1, ist die Summe der Seiten gleich der Hypotenuse; somit, r cos v + r€ sin v = r(cos v + € sin v). Dies ist daher ein allgemeiner Ausdruck für jede gerade Linie, die in derselben Ebene liegt wie die Linien cos 0° Grad und €c sin 90° Grad, die die Länge r hat, und von 0° Grad um v Grad abweicht.

§ 10

Wenn a, b, c, d direkte Linien irgendeiner Länge bezeichnen, positiv odern neagtiv, und die zwei indirekten Linien a +€b und c + €d in derselben Ebene mit der absoluten Einheit liegen, kann ihr Produkt gefunden werden, selbst wenn ihre Abweichung von der absoluten Einheit unbekannt ist. Denn wir müssen nur jede der addierten Linien, die eine Summe ausmachen mit jeder der Linien der anderen multiplizieren und diese Produkte addieren; die Summe ist das geforderte Produkt sowohl bezüglich der Länge als auch der Richtung: so daß
(a + €b) (c + €d) = ac - bd + €(ad + bc).
Beweis: Die Länge der Linie a + €b sei A, und ihre Abweichung von der absoluten Einheit sei v Grad, ebenso sei die Länge von c + €d nun C, und ihre Abweichung sei u.
Dann, nach $9
a + €b = A cos v +A € sin v, und c + €d = C cos u + C€ sin u.
Also a=A cos v, b=A sin v, c=C cos u, d=C sin u (§3). Aber, nach §4,
(a + €b)(c +€d) = AC[cos(v+u)+€ sin(v+u)] =
AC[cos v cos u - sin v sin u + € (cos v sin u + cos u sin v)] §8.
Folglich, wenn wir anstelle von AC cos v cos u nun ac schreiben, und für AC sin v sin u nun db schreiben, usw, werden wir zu der Beziehung kommen, die wir beweisen wollten.

Es folgt, daß wir, obwohl die addierten Linien der Summe nicht alle direkt waren, keine Ausnahme zu der bekannten Regel machen müssen, auf der die Theorie der Gleichungen der Integralfunktionen und ihrer divisores simplices basiert ist, nämlich, daß, wenn zwei Summen multipliziert werden sollen, dan jede der addierten Quantitäten in einer multipliziert werden muß mit jeder der addierten Quantitäten in der anderen. Es ist daher sicher, daß wenn eine Gleichung von geraden Linien handelt und ihre Wurzel die Form a + €b hat, dann eine indirekte Linie bezeichnet wird. Aber will man gerade Linien multiplizieren, die nicht beide in derselben Ebene liegen mit der absoluten Einheit, muss man diese Regel beiseite setzen. Das ist der Grund ,warum an der Multiplikation solcher Linien hier vorbeigegangen wird. Ein anderer Weg, um verändernde Richtung zu bezeichnen, wird später aufgenommen, in §§24-35.

§11

Der Quotient, mit dem Divisor multipliziert, soll dem Dividenden gleich sein. Wir brauchen keinen Beweis, daß diese Linien in derselben Ebene mit der absolutenm Einheit liegen müssen, weil dies unmittelbar aus der Definition in §4 folgt. Ebenso kann man leicht sehen, daß der Quotient von der absoluten Einheit mit einem Winkel v-u abweichen muss, wenn der Dividend von derselben Einheit mit einem Winkel v und der Divisor mit einem Winkel u abweicht.

Angenommen, wir wollen zum Beispiel A(cos v +€sin v) durch
B((cos u +€sin u) dividieren. Der Quotient ist
A/B [cos(v-u)+€sin(v-u)] weil
A/B [cos(v-u)+€sin(v-u)]*B[cos u+€sin u)=A(cos v+€sin v),
nach §7. Das ist, weil A/B [cos(v-u)+€sin(v-u)], multipliziert mit dem Divisor B(cos u +€sin u) dem Dividenden
A(cos v +€sin v) gleich ist, dann muß der Quotient, den wir suchen A/B [cos(v-u)+€sin(v-u)]sein.

§12

Wenn a, b, c und d direkte Linien sind, und die indirekten a+€b und c+€d in derselben Ebene mit der absoluten Einheit sind, dann
1 / (c+€d) = (c+€d) / (c^2 + d^2), und der Quotient
(a+€b) : (c+€d) = (a+€b)*1/(c+€d) =
(a+€b) * (c-€d)/(c^2 + d^2),
weil, folgend §9, man a+€b=A(cos v +€ sin v) ersetzen kann und
c+€d=C(cos u +€sin u) und daher c-€d=C(cos u - €sin u) nach §3, und weil (c+€d)(c-€d)=c^2+ d^2 =C^2 (§10) folgt
(c-€d) / (c^2 + d^2) = 1/C (cos u - €sin u), §10, oder
(c- €d) / (c^2 + d^2) = 1/C (cos (- u) + € sin (- u) =
1 / (c+€d), §11,wird dieses multipliziert mit

a+€b=A(cos v +€sin v), bekommt man
(a+€b)*(c - €d) / (c^2 + d^2) =
A/C (cos(v - u)+€sin (v - u)) = (a+€b)/(c+€d), §11.
Indirekte Quantitäten dieser Art haben mit direkten gemein, daß, wenn der Dividend eine Summe von mehreren Quantitäten ist, dann geben diese geteilt vom Divisor mehrere Quotienten, deren Summe der gewünschte Quotient ist.

§13

Wenn m eine ganze Zahl ist, dann bringt cos v/m + €sin v/m die Potenz cos v +€sin v hervor (§7); daher
(cos v + € sin v) hoch 1/m = cos v/m + €sin v/m; aber von §11 cos(- v/m)+€sin(- v/m)=1/(cos v/m +€sin v/m)=
1/(cos v +€sin v) hoch 1/m=(cos v +€sin v) hoch (- 1/m).
So haben wir immer, egal , ob m positiv oder negativ,
cos v/m + €sin v/m=(cos v +€sin v) hoch 1/m und daher, wenn m und n beide ganze Zahlen sind
(cos v +€sin v) hoch n/m =cos v n/m +€sin v n/m.
Hieraus kann man den Wert von Ausdrücken finden, wie
$\sqrt[n]{(b + c + \sqrt{-1})}$ oder

$\sqrt[m]{[a+ \sqrt[n]{(b+c \sqrt{-1})}]}$;
zum Beispiel bezeichnet
$\sqrt[3]{4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}}$ eine gerade Linie, deren Länge =2, und deren Winkel mit der absoluten Einhiet 10° ist.

§14

Wenn zwei Winkel dengleichen sinus und dengleichen cosinus haben, dann ist ihre Differenz entweder =0 oder - /+ 4 rechte Winkel, oder ein Vielfaches von +/- 4 rechten Winkeln; und umgekehrt, wenn die Differenz zwischen zwei Winkeln 0 ist oder +/- 4 rechte Winkel,ein oder mehrere Male genommen, dann sind ihr sinus, als auch ihr cosinus gleich.

§15

Wenn m eine ganze Zahl ist und pi=360°, dann nimmt (cos v +€sin v) hoch 1/m nur die folgenden verschiedenen m Werte an
cos v/m + €sin v/m, cos((pi+v)/m)+€sin((pi+v)/m),
cos((2pi+v)/m)+€sin((2pi+v)/m),...
cos(((m-1)pi+v)/m)+€sin(((m-1)pi+v)/m), weil die Zahlen, womit pi in der vorhergehenden Reihe multipliziert wurde, in einer arithmetischen Progession 1,2,3,4,....,m -1 sind. Daher ist die Summe von irgend welchen zwei =m, wenn die eine soweit von 1 entfernt ist, wie die andere von m - 1 , und wenn ihre Zahlen ungerade sind, dann ist zweimal der Weg zu ihrer Mitte =m, daher, wenn man ((m - n)pi+v)/m zu
((m - u)pi+v)/m addiert, und die letztere ist in der Folge soweit von (pi + v)/m entfernt, wie ((m-n)pi + v)/m von
((m - 1)pi + v)/m, dann ist die Summe
=((2m - u - n)/m) pi + 2v/m = pi +2v/m.

Aber (m - n)pi/m zu addieren ist dasselbe, wie (m - n)(- pi)/m zu subtrahieren; und da die Differenz pi ist, hat dann ((m - n)(- pi)+v)/m denselben cosinus und sinus wie ((m - u)pi + v)/m, nach §14 ; ebenso haben ((m - u)(- pi)+v)/m und (m - n)pi+v)/m denselben sinus und cosinus; also gibt - pi keinen anderen Wert als pi. Aber daß keine von diesen gleich ist, folgt aus der Tatsache, daß die Differenz zwischen zwei Winkeln der Reihe immer weniger als pi ist, und niemals =0. Noch findet man mehr Werte, wenn man die Reihe fortsetzt, denn dann bekommt man die Winkel pi + v/m, pi + (pi +v)/m, pi + (2pi+v)/m, usw, so sind nach §14 die Werte ihres cosinus und sinus dieselben wie vorher. Sollten die Winkel aus der Reihe fallen, würde der Zähler von pi nicht mit einer ganzen Zahl multipliziert, und die Winkel, m-fach genommen, könnten keinen Winkel erzeugen, der von v subtrahiert 0 gäbe oder +/- pi, oder ein Vielfaches von +/- pi; daher könnte die m-te Potenz eines solchen Winkels einen cosinus und sinus haben =cos v + € sin v.

§16

Ohne den Winkel zu kennen, den die indirekte Linie 1+x mit der absoluten macht, findet man, wenn die Länge von x weniger als 1 ist, die Potenz (1+x) hoch m = $1+mx/1 +m/1 *(m - 1)/2 *x^2$ + usw. und wenn diese Serie umgeordnet wird nach den Potenzen von m, behält sie ihren Wert und wird verändert in
$1+m\,l/1 + m^2 l^2/1*2 + m^3 l^3/1*2*3$+usw,
wobei $l=x - x^2/2 + x^3/3$ - x hoch 4 /4+ usw, und ist eine Summe einer direkten Linie a und einer senkrechten b $\sqrt{-1}$, dann ist b das kleinste Mal des Winkels, den 1+x mit +1 hat, und wenn man
1+1/1+1/1*2+1/1*2*3+ usw.=e setzt, dann wird (1+x)hoch m oder
$1+m\,l/1+m^2 l^2/1*2 + m^3 l^3/1*2*3$+ usw mit
e hoch (ma+mb $\sqrt{-1}$) bezeichnet, das heißt (1+x) hoch m hat die Länge e hoch ma und einen Richtungswinkel, dessen Mal mb ist, m soll angenommen positiv oder negativ sein.

Also kann die Richtung von Linien in derselben Ebene auch noch auf eine andere Art ausgedrückt werden, nämlich mit Hilfe des natürlichen Logarithmus. Ich werde einen vollständigen Beweis dieser Sätze ein anderes Mal vorbringen, wenn es erlaubt ist. Nun, da ich Rechenschaft gegeben habe, wie man die Summe, das Produkt, den Quotienten und die Potenz von geraden Linien gegeben habe, werde ich nur ein paar Beispiele der Anwendung dieser Methode geben.
"
Es folgt ein zweiter Teil von etwa fünffacher Länge.
Ein Landmaaler, (Mal wie in Denkmal), ist das nicht einer, der in der Ebene Orientierungspunkte setzt ?
Viel Spaß damit
Hero